Høgskolen i Østfold

EKSAMEN

Emnekode: IRF30014	**Emnenavn:** Matematikk 3
Dato: 19.6.2017 **Sensurfrist:** 10.07.2017	**Eksamenstid:** 0900-1300
Antall oppgavesider: 2 **Antall vedleggsider:** 0	**Faglærer:** Mikjel Thorsrud, **Oppgaven er kontrollert:** Ja

Hjelpemidler:

Godkjent kalkulator og alle skriftlige hjelpemidler.

Om eksamensoppgaven:

Oppgavesettet består av 10 deloppgaver som i utgangspunktet teller like mye.

Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig

Oppgave 1 Finn fokuspunkter, eksentrisitet, styrelinjer og asymptoter til hyperbelen

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Tegn en skisse av hyperbelen, fokuspunkter, styrelinjer og asymptoter.

Oppgave 2 Vis at $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ er egenvektorer for matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

og skriv ned de tilhørende egenverdiene λ_1 og λ_2. Begrunn at matrisen A er ortogonalt diagonaliserbar og finn matrisene P og D slik at $A = PDP^T$.

Oppgave 3 Finn alle kritiske punkt til funksjonen $f(x, y, z) = xy$ på ellipsoiden

$$36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36.$$

Bestem absolutte maksimum og minimum.

Oppgave 4 Regn ut

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{x+2y} \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x.$$

Vis alle mellomregninger.

Oppgave 5 La D være området i rommet avgrenset av planet $z = 1$ og paraboloiden $z = 10 - x^2 - y^2$. Beskriv D i sylinderkoordinater og regn ut volumet til området D.

Oppgave 6 Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er definert ved

$$\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}.$$

La C være kurven med parametrisering $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (2\pi t - t^2)\mathbf{k}$, hvor $0 \leq t \leq 2\pi$. Vis at C er lukket og regn ut linjeintegralet

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}.$$

Om mulig, bruk svaret til å bestemme om $\mathbf{F}$ er konservativt.

Oppgave 7 Finn en potensialfunksjon for det konservative vektorfeltet

$$\mathbf{F} = \frac{e^y}{x}\mathbf{i} + (e^y \ln x + z\cos y)\,\mathbf{j} + (\sin y)\mathbf{k}$$

Regn ut arbeidet

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},$$

hvor kurven C er den rette linjen fra punktet $(e^2, 0, 0)$ til punktet $(1, \pi/2, 1)$.

Oppgave 8 En fallskjermhopper masse $m = 72$ kg faller i rett linje mot bakken. Kreftene som virker på hopperen er gravitasjonskraften og luftmotstand. Gravitasjonskraften har størrelse mg, hvor $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ er tyngdeakselerasjonen. Vi antar en kvadratisk modell for luftmotstanden med y-komponent bv^2, hvor $v = \frac{dy}{dt}$ er hastighetsvektoren og b er en positiv koeffisient. Newtons 2. lov gir da følgende bevegelsesligning

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{b}{m}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + g = 0\,.$$

a) Skriv bevegelsesligningen om til to koblede 1. ordens differensialligninger. Bestem koeffisienten b i SI-enheter ved å bruke at fallskjermhopperens terminalfart er 190 km/t.

b) Vi innfører dimensjonsløse variable $\tilde{t}$ og $\tilde{y}$ definert

$$t = \tau\cdot\tilde{t}, \quad y = L\cdot\tilde{y},$$

hvor τ er en tidsskala med SI-enhet s (sekund) og L er en lengdeskala med SI-enhet m (meter). Skriv de koblede differensialligningene fra oppg. a) om på dimensjonsløs form

$$\textbf{I.}\quad \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}} = \tilde{v},$$
$$\textbf{II.}\quad \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} = \alpha\tilde{v}^2 - \beta,$$

og bestem koeffisientene α og β uttrykt ved b, m, g, τ og L. Som en konsistenssjekk, vis at α og β er dimensjonsløse størrelser.

c) Vi velger $\tau = 5.39$ s og $L = 285$ m slik at $\alpha = \beta = 1.00$ i de dimensjonsløse bevegelsesligningene **I.** og **II.**

i) Ved tidspunktet $t = 0$ s er posisjonen $y_0 = 1100$ m og hastigheten $v_0 = 0$ m/s. De tilsvarende dimensjonsløse størrelsene blir da $\tilde{y}_0 = 3.86$ og $\tilde{v}_0 = 0$. Bruk midtpunktmetoden til å finne en tilnærmet verdi for posisjonen $\tilde{y}$ og hastigheten $\tilde{v}$ ved tidspunktet $\tilde{t} = 1$. Bruk kun ett tidssteg, dvs. regn ut $\tilde{y}_1$ og $\tilde{v}_1$ ved å bruke tidssteget $\Delta\tilde{t} = 1$.

ii) Bruk resultatet i punkt i) til å beregne fart og hastighet i SI-enheter ved tidspunktet $t = \Delta t = 5.39$ s.