EKSAMENSOPPGAVE

Emne: IRF 10011 Matematikk 1. Lærere Øystein Holje og Kent Ryne,
Kontor S-415:69104068
Mobil: 47288523

Grupper: Diverse.	**Dato: 05.12.2014.**	**Tid: 09.00 – 13.00.**
Antall oppgavesider: 2.	**Antall vedleggsider: 2, formelark.**	
Sensurfrist: 12.1.2015.		
Hjelpemidler: Godkjent kalkulator og alle skriftlige hjelpemidler.		
KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG		

Vis alle utregninger. Besvarelsen vurderes ut fra kvaliteten på begrunnelsene.
Alle deloppgaver teller likt. Oppgavesettet har 11 deloppgaver.

Oppgave 1

a) Løs likningen $\frac{z-7}{3+i}+(3-i)z+i=2$.

b) Skriv det komplekse tallet $z=-27i$ på eksponentiell form.
Bestem tredje røttene til tallet $z=-27i$. Svaret gis på normalform.

Oppgave 2

Bestem grensen hvis den eksisterer $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin^2 x}-\cos x}{1-\cos x}$.

Oppgave 3

Løs likningssystemet ved å få totalmatrisen på redusert trappeform

(Gauss – Jordans metode): $\begin{aligned} x+5y-2z&=1\\ 2x+11y+7z&=14\\ -3x-14y+12z&=4 \end{aligned}$.

Oppgave 4

Bestem alle løsningene til differensiallikningen $x^2y'=-e^{-y}$.

Oppgave 5

Et kjegleformet legeme av is smelter. I det øyeblikk radien er 2m og høyden er 3m minker både radien og høyden med 2cm per time.
Hvor hurtig minker volumet i samme øyeblikk?

Oppgave 6

Vis at punktet $P(2,-1)$ ligger på kurven $xy^2 + x^2y + x^3 + y^3 = 5$.
Bestem likningen for tangenten til kurven i punkt *P*.

Oppgave 7

Grafen til funksjonen $y = f(x) = \sqrt{e^{2x} + 4}$ avgrenser sammen med x – aksen og linjen $x = 2$ et flatestykke i 1. kvadrant.
Beregn volumet av legemet som framkommer når flatestykket dreies en gang om x – aksen.

Oppgave 8

Vi skal bestemme tilnærmet verdi for skjæringspunktet til funksjonene $f(x) = \ln x$ og $g(x) = 2 - x$.

Vis at det finnes ett og bare ett skjæringspunkt i intervallet $1 < x < 2$.
Vi bruker Newtons metode til å bestemme en tilnærmet verdi for x – koordinaten til skjæringspunktet.

Vis at $x_{n+1} = \dfrac{3x_n - x_n \ln x_n}{x_n + 1}$.

Bestem skjæringspunktet, (x, y), korrekt avrundet til 5 desimaler.

Oppgave 9

Beregn integralene:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{6x-1}{\sqrt{x}}\,dx$.

b) $\displaystyle\int \frac{10x^2 + 4x + 8}{x^3 + x}\,dx$.

Formelark i Matematikk 1.

Røtter av komplekse tall.

Et komplekst tall $z = |z|e^{i\theta}$ har de n komplekse røttene, som er løsningene av likningen $w^n = z$, $w_k = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta + k2\pi}{n})}, k = 0,1,\ldots,n-1$.

Newtons metode for å løse likningen $f(x) = 0$ tilnærmet.
Starter med en verdi x_0 som er nær den korrekte løsningen.

Itererer neste tilnærming fra forrige ved $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Simpsons formel for å beregne tilnærmet verdi av integralet $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

Intervallbredde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, der n er antall intervaller området deles i, alltid partall. Tilnærmet verdi er:

$$I_S = \frac{\Delta x}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\big).$$

Feilestimat: $F = |I - I_S| \le \dfrac{M(b-a)^5}{180n^4}$, der tallet M oppfyller $|f^{(4)}(x)| \le M$ på intervallet $[a,b]$.

En lineær 1. ordens differensiallikning på standard form $y' + p(x)y = q(x)$ har løsningen $y = e^{-P(x)}\int e^{P(x)} q(x)\,dx$, der $P(x) = \int p(x)\,dx$.

Integrasjon.

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}(x) + C = \arctan(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}(x) + C = \arcsin(x) + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, r \ne -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Integrasjonsmetoder.

Delvis: $\int U'V \, dx = UV - \int UV' \, dx$.

Substitusjon/Variabelskifte: $\int f(u(x))u'(x) \, dx = \int f(u) \, du$.

Derivasjon.

$(\sin kx)' = k \cos kx$

$(\cos kx)' = -k \sin kx$

$(x^r)' = rx^{r-1}$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(e^{kx})' = ke^{kx}$

Derivasjonsmetoder.

Produkt: $(UV)' = U'V + UV'$

Brøk: $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

Kjerne: $(f(u(x))' = f'(u)u', \; u = u(x)$

Kurvelengde.

$y = f(x), \; a \le x \le b$ gir $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$.

Volum av omdreiningslegeme.

Om x – aksen: $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$.

Om y – aksen: $V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$.